

**Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Северо-Осетинский государственный университет
имени Коста Левановича Хетагурова»**

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

«Высшая математика»

Направление подготовки 38.03.01 Экономика

Профиль подготовки
«Экономика и финансы»

Квалификация (степень) выпускника – бакалавр

Форма обучения - очная

Год начала подготовки - 2024

Утверждена в составе ОПОП.

Составитель: доцент кафедры алгебры и анализа, к.э.н., Хугаева Л.Т.

Владикавказ 2024

1. Структура, и общая трудоемкость дисциплины

Общая трудоемкость дисциплины составляет 7 зачетных единиц (252 часа).

	Очная форма обучения
Курс	1
Семестр	1, 2
Лекции	18/18
Практические (семинарские) занятия	36/18
Лабораторные занятия	-
Консультации	-
Итого аудиторных занятий	90
Самостоятельная работа	18/108
Курсовая работа	-
Зачет с оценкой	+
Экзамен	36/-
Общее количество часов	252

2. Цели освоения дисциплины

- обучение основным математическим методам, необходимым для анализа и моделирования экономических процессов;
- воспитание достаточно высокой математической культуры: ясное понимание необходимости математической составляющей в общей подготовке студентов;
- выработка представления о роли и месте математики в современной цивилизации и в мировой культуре,
- умение логически мыслить, оперировать с абстрактными объектами и быть корректным в употреблении математических понятий и символов для выражения количественных и качественных отношений;
- овладение математическими методами для решения экономических задач и приобретение навыков использования универсального понятийного аппарата и широкого арсенала технических приемов математики при дальнейшем изучении профильных дисциплин, построении математических моделей различных явлений и процессов в экономике,

Достижение этих целей обеспечивает выпускнику получение высшего профессионально профилированного образования и обладание перечисленными ниже компетенциями. Они способствуют его социальной мобильности, устойчивости на рынке труда и успешной работе в самых разнообразных сферах (научно-исследовательская деятельность, аналитическая поддержка процессов принятия решений для управления предприятием и проч.).

3. Место дисциплины в структуре ОПОП

Дисциплина «Высшая математика» относится к дисциплинам Блок 1. Обязательная часть, Б1.О.08

Изучение данной дисциплины базируется на следующих дисциплинах: «Алгебра и начала анализа», «Геометрия» (программа средней общеобразовательной школы) или соответствующих математических дисциплин среднего профессионального образования.

Студенты должны владеть знаниями и компетенциями, соответствующими школьной программе по математике.

Знания, полученные при изучении дисциплины «Высшая математика» могут быть использованы при изучении курсов «Финансовая математика», «Микроэкономика», «Эконометрика», «Макроэкономика» и др.

4. Требования к результатам освоения дисциплины

Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины.

В результате изучения дисциплины обучающийся должен обладать следующими компетенциями (результатами освоения образовательной программы):

- Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач (УК-1).

Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины «Высшая математика»:

Универсальные компетенции выпускников				
Код и наименование универсальной компетенции (УК)	Код и наименование индикатора достижения универсальной компетенции	Результаты освоения компетенции		
		Знать	Уметь	Владеть
УК-1. Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	УК-1.1. Осуществляет поиск необходимой информации, опираясь на результаты анализа поставленной задачи.	Знает основные методы критического анализа и основы системного подхода как общенаучного метода.	1. Умеет анализировать задачу, используя основы критического анализа и системного подхода.	Владеет практическим опытом анализа задач.
	УК-1.2. . Разрабатывает варианты решения проблемной ситуации		2. Умеет осуществлять поиск необходимой для решения поставленной задачи информации, критически оценивая надежность различных источников информации	

	<p>на основе критического анализа доступных источников информации.</p> <p>УК-1.3. Выбирает оптимальный вариант решения задачи, аргументируя свой выбор.</p>	<p>Знает критерии сопоставления различных вариантов решения поставленной задачи.</p> <p>Знает принципы, критерии, правила построения суждения и оценок.</p>	<p>1. Умеет осуществлять критический анализ собранной информации на соответствие ее условиям и критериям решения поставленной задачи.</p> <p>2. Умеет отличать факты от мнений, интерпретаций и оценок при анализе собранной информации.</p> <p>3. Умеет сопоставлять и оценивать различные варианты решения поставленной задачи, определяя их достоинства и недостатки.</p> <p>1. Умеет формировать собственные суждения и оценки, грамотно и логично аргументируя свою точку зрения.</p> <p>2. Умеет применять</p>	<p>Владеет практическим опытом работы с информационными источниками, опыт научного поиска, создания научных текстов.</p> <p>Владеет основными методами, способами и средствами получения, хранения, переработки информации для представления</p>
--	--	---	--	--

			теоретические знания в решении практических задач.	в доступной и понятной форме результатов своей профессиональной деятельности.
--	--	--	--	---

5. Содержание и учебно-методическая карта дисциплины

Таблица 5.1.

Номер недели	Наименование тем (вопросов), изучаемых по данной дисциплине	Занятия		Самостоятельная работа Студентов		Формы контроля	Литература
		л	пр	Содержание	Часы		
	Семестр 1						
1-2	Прямая линия на плоскости. Расстояние между двумя точками. Деление отрезка в данном отношении. Уравнение линии. Некоторые элементарные задачи.	2	4	Координаты точки на прямой и на плоскости. Площадь треугольника и многоугольника.	2	Опрос на занятиях	[1], [5], [2], [3], [4],
3-4	Прямая линия на плоскости. Угловой коэффициент прямой. Уравнение прямой с угловым коэффициентом. Общее уравнение прямой. Угол между двумя прямыми. Условие параллельности и перпендикулярности прямых.	2	4	Нормальное уравнение прямой. Точка пересечения двух прямых.	2	мини-опрос	[1], [5], [2], [3], [4],
5-6	Уравнение пучка прямых. Уравнение прямой, проходящей через две точки. Уравнение прямой в отрезках.	2	4	Расстояние от точки до прямой.	2	Опрос на занятиях	[1], [5], [2], [3], [4],
7-8	Кривые второго порядка. Окружность Эллипс. Гипербола.	2	4	Парабола	2	Проверка работы	[1], [5], [2], [3], [4],
9-10	Основные сведения о матрицах. Операции над матрицами. Операции над	2	4	Элементарные преобразования матриц.	2	Проверка на занятиях	[1], [5], [2], [3], [4],

	матрицами. Обратная матрица. Ранг матрицы.						
11-12	Определители квадратных матриц. Свойства определителей. Способы вычисления.	2	4	Ранг матрицы.	2	Опрос на занятиях	[1], [5], [2], [3], [4],
13-14	Решение систем линейных уравнений с помощью формул Крамера, методом обратной матрицы. Метод Гаусса.	4	6	Решение различных систем линейных уравнений.	4	Проверка на занятиях	[1], [5], [2], [3], [4],
15-16	Применение теории матриц в экономике.	2	6	Различные задачи на применение аналитической геометрии и линейной алгебры в экономике.	2	Проверка на занятиях	[1], [5], [2], [3], [4],
	ИТОГО ЗА 1 семестр	18	36		18		
	Семестр 2						
1	Множества. Абсолютная величина действительного числа. Понятие функции. Способы задания функции. Понятие неявной, обратной и сложной функций.	1	1	Основные свойства функции. Графики основных элементарных функций.	12	Опрос на занятиях	[1], [5], [2], [3], [4],
2	Теория пределов Предел функции в точке. Односторонние пределы Бесконечно большие и бесконечно малые величины. Основные теоремы о пределах.	1	1				
3	Первый замечательный предел Второй замечательный предел. Вычисление пределов. Раскрытие неопределенностей.	1	1	Другие замечательные пределы.	6	Проверка на занятиях	[1], [5], [2], [3], [4],

4	Непрерывность функции Некоторые свойства непрерывных функций. Точки разрыва функции.	1	1	Применения производной при решении экономических задач.	6	мини-опрос	[1], [5], [2], [3], [4],
5	Задачи, приводящие к понятию производной. Определение производной. Зависимость между непрерывностью и дифференцируемостью функции.	1	1	Вычисление производных функций, заданных неявно, параметрически.	6	Вопросы в билетах. Проверка на занятиях	[1], [5], [2], [3], [4],
6	Схема вычисления производной. Основные правила дифференцирования. Производная неявной, обратной и сложной функций. Производные высших порядков. Производная степенно-показательной функции.	1	1	Исследование функций при помощи производных. Решение задач	6	мини-опрос	[1], [5], [2], [3], [4],
7	Условие постоянства, возрастания и убывания функции. Экстремум функции. Наибольшее и наименьшее значения функции.	1	1	Наибольшее и наименьшее значения функции. В задачах экономики.	6	Опрос на занятиях	[1], [5], [2], [3], [4],
8	Правило Лопиталья. Выпуклость и вогнутость графика функции. Точки перегиба. Асимптоты кривой. Полное исследование функции	1	1	Исследование функции и построение графика. Приближенное решение уравнений.	6	Проверка на занятиях	[1], [5], [2], [3], [4],
9	Приложения дифференциального исчисления в экономике.	1	1	Графики разрывных функций	6	мини-опрос	
10	Первообразная функция. Неопределенный интеграл. Свойства.	1	1	Тригонометрические подстановки.	6	Решение задач на	[1], [5], [2], [3], [4],

	Интегралы основных элементарных функций. Способы интегрирования. Интегрирование рациональных алгебраических функций. Интегрирование некоторых тригонометрических функций					практич. занятиях	
11	Задача о площади криволинейной трапеции. Определение определенного интеграла. Геометрический смысл. Вычисление определенного интеграла. Формула Ньютона-Лейбница. Свойства определенного интеграла. Замена переменной и формула интегрирования по частям в определенном интеграле.	1	1	Приближенное вычисление определенных интегралов.	6	мини-опрос	[1], [5], [2], [3], [4],
12	Геометрические приложения определенного интеграла. Площадь криволинейной трапеции. Объем тела вращения. Длина дуги.	1	1				
13	Дифференциал функции 2-х переменных. Экстремум функции. Наибольшее и наименьшее значения функции.	1	1	Условный экстремум. Метод множителей Лагранжа.	6		[1], [5], [2], [3], [4],
14	Дифференциальные уравнения. Общие понятия. Дифференциальные уравнения 1-го порядка. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными. Однородные дифференциальные уравнения 1-го порядка. Линейные дифференциальные уравнения 1-го порядка	1	1	Дифференциальные уравнения 2-го порядка, допускающие понижение степени.	12		[1], [5], [2], [3], [4],
15	Линейные однородные дифференциальные уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами. Линейные	1	1	Применение дифференциальных уравнений в экономике.	6		[1], [5], [2], [3], [4],

	неоднородные дифференциальные уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами.						
16	Числовые ряды. Основные понятия. Сходимость ряда. Некоторые свойства числовых рядов. Необходимый признак сходимости ряда. Гармонический ряд. Достаточные признаки сходимости рядов с положительными членами.	1	1	Знакопеременные ряды.	6		[1], [5], [2], [3], [4],
17	Степенные ряды. Область сходимости степенного ряда.	1	1	Применение рядов в приближенных вычислениях.	6		[1], [5], [2], [3], [4],
18	Комплексные числа. Арифметические операции над комплексными числами.	1	1	Тригонометрическая форма комплексного числа.	6		[1], [5], [2], [3], [4],
	ИТОГО ЗА 2 СЕМЕСТР	18	18		108		

Примечания:

- Все виды учебной работы могут проводиться дистанционно на основании локальных нормативных актов.
- В целях реализации индивидуального подхода к обучению студентов, осуществляющих учебный процесс по индивидуальной траектории в рамках индивидуального рабочего плана, изучение данной дисциплины может осуществляться через индивидуальные консультации преподавателя очно, в часы консультаций, по электронной почте и с использованием платформ дистанционного обучения.

6. Образовательные технологии

В соответствии с государственными образовательными стандартами высшего образования реализация учебного процесса должна предусматривать проведение занятий в интерактивных и активных формах. Внедрение этих форм обучения – одно из важнейших направлений совершенствования подготовки студентов в современном вузе. Цель – повышение эффективности образовательного процесса, достижение всеми обучающимися высоких результатов обучения.

Интерактивные формы проведения занятий предполагают обучение в сотрудничестве. Все участники образовательного процесса (преподаватель и студенты) взаимодействуют друг с другом, обмениваются информацией, совместно решают проблемы, моделируют ситуации. Суть использования активных и интерактивных форм проведения состоит в погружении студентов в реальную атмосферу делового сотрудничества по разрешению проблем, оптимальную для выработки навыков и качеств будущего специалиста.

Для решения воспитательных и учебных задач преподавателем могут быть использованы следующие интерактивные формы обучения.

Традиционные лекции и практические (семинарские) занятия с использованием современных интерактивных технологий.

Лекция-диалог – содержание подается через серию вопросов, на которые студент должен отвечать непосредственно в ходе лекции.

Онлайн-семинар – разновидность веб-конференции, проведение онлайн-встреч или презентаций через Интернет в режиме реального времени. Каждый из участников находится у своего компьютера (средства связи), а связь между ними поддерживается через Интернет посредством загружаемого приложения, установленного на компьютере каждого участника.

Видеоконференция – сеанс видеоконференцсвязи (ВКС) – это технология интерактивного взаимодействия двух и более участников образовательного процесса для обмена информацией в реальном режиме времени.

Видео-лекция – снятая на камеру сокращенная лекция, дополненная фотографиями и схемами, иллюстрирующая подаваемый в лекции материал.

Технология электронного обучения (реализуется при помощи электронной образовательной среды СОГУ при использовании ресурсов ЭБС, при проведении автоматизированного тестирования и т. д.).

Творческое задание составляет содержание (основу) любой интерактивной формы проведения занятия. Выполнение творческих заданий требует от студента воспроизведения полученной ранее информации в форме, определяемой преподавателем и требующей творческого подхода: 1) подборка примеров из практики; 2) подборка материала по определенной проблеме;

Публичная презентация проекта - самый эффективный способ донесения важной информации при публичных выступлениях. Слайд-презентации позволяют эффектно и наглядно представить содержание, выделить и проиллюстрировать сообщение.

Интерактивная лекция представляет собой выступление преподавателя перед аудиторией студентов с применением следующих интерактивных форм обучения: 1. управляемая дискуссия или беседа; 2. демонстрация слайдов или учебных фильмов; 3. мозговой штурм; 4. мотивационная речь и др.

Разработка проекта позволяет участникам мысленно выйти за пределы аудитории и составить проект своих действий по обсуждаемому вопросу. Участники могут обратиться за консультацией, дополнительной литературой в специализированные учреждения, библиотеки и т.д.

Проблемное обучение - поиск ответов на вопросы по теме.

7. Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы

Самостоятельная работа обучающихся является одним из видов учебных занятий. Самостоятельная работа проводится с целью:

- систематизации и закрепления полученных теоретических знаний и практических умений обучающихся студентов;
- углубления и расширения теоретических знаний;
- формирования умений использовать нормативную, правовую, справочную документацию и специальную литературу;
- формирования самостоятельности мышления, способностей к саморазвитию, самосовершенствованию и самореализации;
- развития исследовательских умений.

К видам самостоятельной работы при изучении данной дисциплины относится: написание докладов, эссе, подготовка презентаций, самостоятельное изучение литературы по теме и составление по ней конспектов, работа со справочными материалами (терминологическими и иными словарями, энциклопедиями) и т.д.

Темы и формы внеаудиторной самостоятельной работы, ее трудоёмкость содержатся в разделе 5, табл. 5.1.

Методические рекомендации по дисциплине прилагаются.

8. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости, рубежной аттестации и промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины

Рабочая программа предусматривает проведение лекционных и практических занятий, а также следующие виды работ: самостоятельную работу студентов по подготовке устных сообщений, написанию докладов, подготовку презентаций и обсуждений по темам дисциплины - работу в активной и интерактивной формах.

Рабочая программа предполагает текущий и промежуточный контроль знаний.

Текущий контроль – это непрерывно осуществляемый мониторинг уровня усвоения знаний и формирования умений и навыков в течение семестра или учебного года. Текущий контроль знаний, умений и навыков студентов осуществляется в ходе учебных (аудиторных) занятий, проводимых по расписанию. Формами текущего контроля выступают опросы на занятиях с целью проверки наличия знаний, необходимых для усвоения нового материала или для выяснения степени усвоения изложенного материала.

Рубежный контроль осуществляется по окончании изучения материала модуля в заранее установленное время. Рубежный контроль проводится с целью определения качества усвоения материала учебного модуля в целом. В течение семестра такие контрольные мероприятия проводятся по графику.

Контрольные задания (демоверсии) для оценки знаний, умений, навыков и (или) опыта деятельности, характеризующих этапы формирования компетенций в процессе освоения образовательной программы

Примеры контрольных заданий по дисциплине для формирования УК– 1:

Семестр 1

Примерные задания для контрольных работ Уравнение линии на плоскости

Пример. Найти уравнение прямой, проходящей через точки A(1, 2) и B(3, 4).

Применяя формулу $\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1}$, получаем:

$$y-2 = \frac{4-2}{3-1}(x-1)$$

$$y-2 = x-1$$

$$x-y+1=0$$

Пример. Задано общее уравнение прямой $x-y+1=0$. Найти уравнение этой прямой в отрезках.

$$C = 1 - \frac{x}{1} + \frac{y}{1} = 1, \quad a = -1, \quad b = 1.$$

Пример. Составить уравнение прямой, проходящей через точку A(-2, -3) и начало координат.

Уравнение прямой имеет вид: $\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1}$, где $x_1 = y_1 = 0$; $x_2 = -2$; $y_2 = -3$.

$$\frac{x-0}{-2-0} = \frac{y-0}{-3-0}; \quad \frac{x}{-2} = \frac{y}{-3}; \quad 3x-2y=0.$$

Пример. Определить угол между прямыми: $y = -3x + 7$; $y = 2x + 1$.

$$k_1 = -3; \quad k_2 = 2 \quad \operatorname{tg} \varphi = \left| \frac{2-(-3)}{1-(-3)2} \right| = 1; \quad \varphi = \pi/4$$

Пример. Даны вершины треугольника A(0; 1), B(6; 5), C(12; -1). Найти уравнение высоты, проведенной из вершины C.

Находим уравнение стороны AB: $\frac{x-0}{6-0} = \frac{y-1}{5-1}; \quad \frac{x}{6} = \frac{y-1}{4}; \quad 4x = 6y - 6;$

$$2x - 3y + 3 = 0; \quad y = \frac{2}{3}x + 1.$$

Искомое уравнение высоты имеет вид: $Ax + By + C = 0$ или $y = kx + b$.

$k = -\frac{3}{2}$. Тогда $y = -\frac{3}{2}x + b$. Т.к. высота проходит через точку C, то ее координаты

удовлетворяют данному уравнению: $-1 = -\frac{3}{2}12 + b$, откуда $b = 17$. Итого: $y = -\frac{3}{2}x + 17$.

$$\text{Ответ: } 3x + 2y - 34 = 0.$$

Для самостоятельного решения:

Составить уравнение прямой, проходящей через точку A(5;1) под углом 45° к оси Oх.

Дана прямая $2x + 5y - 1 = 0$. Составить уравнение прямой, проходящей через точку M(-1;3)

Даны вершины треугольника A(-1;3); B(3;-2) и C(5;3). Составить уравнение высоты, опущенной из вершины A на сторону BC параллельно данной прямой.

Даны вершины треугольника: A(3;0), B(-5;6) и C(-4;1). Определить длину медианы, проведенной из вершины C.

Даны вершины треугольника: A(3;5), B(-3;3) и C(5;-8). Определить длину медианы, проведенной из вершины C.

Найти угловые коэффициенты прямых и определить, какие из данных прямых перпендикулярны прямой $2x - y + 3 = 0$ 1) $4x + 8y + 17 = 0$; 2) $4x - 8y - 11 = 0$; 3)

$$y = -\frac{1}{2}x + 6; 4) y = -2x - 7 5) \frac{x}{10} + \frac{y}{5} = 1$$

Даны вершины треугольника A(3;0); B(-5;6) и C(-4;1). Составить уравнение высоты, опущенной из вершины C.

Даны точки A(2;4) и B(-2;6). Найти сумму координат середины отрезка AB

Записать уравнение прямой, проходящей через точку A(-3;3)

Определители и матрицы

Пример. Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 1 \\ 1 & -4 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ и число $\alpha = 2$. Найти

$A^T B + \alpha C$.

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -4 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \quad A^T B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & -4 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 1 \cdot 2 \\ 0 \cdot 1 + 4 \cdot 3 - 4 \cdot 2 \\ 3 \cdot 1 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix};$$

$$\alpha C = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad A^T B + \alpha C = \begin{pmatrix} 9 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

Пример. Найти произведение матриц $A = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ и $B = (2 \ 4 \ 1)$.

$$AB = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \cdot (2 \ 4 \ 1) = \begin{pmatrix} 1 \cdot 2 & 1 \cdot 4 & 1 \cdot 1 \\ 4 \cdot 2 & 4 \cdot 4 & 4 \cdot 1 \\ 3 \cdot 2 & 3 \cdot 4 & 3 \cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 8 & 16 & 4 \\ 6 & 12 & 3 \end{pmatrix}.$$

$$BA = (2 \ 4 \ 1) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = 2 \cdot 1 + 4 \cdot 4 + 1 \cdot 3 = 2 + 16 + 3 = 21.$$

Пример. Вычислить определитель матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = (-2 \cdot 1 - 1 \cdot 3) - 2(0 \cdot 1 - 3 \cdot 3) + (0 \cdot 1 + 3 \cdot 2) =$$

$$= -5 + 18 + 6 = 19.$$

Пример. Дана матрица $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$, найти обратную A^{-1} .

$$\det A = 4 - 6 = -2.$$

$$\begin{array}{llll} M_{11}=4; & M_{12}=3; & M_{21}=2; & M_{22}=1 \\ x_{11}=-2; & x_{12}=1; & x_{21}=3/2; & x_{22}=-1/2 \end{array}$$

Таким образом, $A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}$.

Пример. Определить ранг матрицы.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 11 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 5 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 11 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 11 \end{pmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 11 \end{vmatrix} = 11 - 10 = 1 \neq 0 \Rightarrow \text{Rg}A = 2$$

Для самостоятельного решения:.

Найти алгебраические дополнения элементов 3-го столбца матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Определить ранг матрицы. $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

Вычислить определитель, разложив его по элементам 2-й строки

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

Найти произведение матриц $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

Упростить и вычислить определитель

$$A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$$

Определить ранг матрицы. $\begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

Определить ранг матрицы. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 6 & 8 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 4 \end{pmatrix} \sim$

Найти матрицу, обратную данной $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

Найти матрицу $C=AB^T$, где $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$,

Вычислить A^2 , если $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$

Вычислить матрицу $D=ABC$, где

$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

Упростить и вычислить определитель

$$A = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \\ -3 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

Решение систем линейных уравнений

Пример. Найти решение системы уравнений по формулам Крамера:

$$\begin{cases} 5x - y - z = 0 \\ x + 2y + 3z = 14 \\ 4x + 3y + 2z = 16 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 5(4 - 9) + (2 - 12) - (3 - 8) = -25 - 10 + 5 = -30;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 14 & 2 & 3 \\ 16 & 3 & 2 \end{vmatrix} = (28 - 48) - (42 - 32) = -20 - 10 = -30.$$

$$x_1 = \Delta_1 / \Delta = 1;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 1 & 14 & 3 \\ 4 & 16 & 2 \end{vmatrix} = 5(28 - 48) - (16 - 56) = -100 + 40 = -60.$$

$$x_2 = \Delta_2 / \Delta = 2;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 14 \\ 4 & 3 & 16 \end{vmatrix} = 5(32 - 42) + (16 - 56) = -50 - 40 = -90.$$

$$x_3 = \Delta_3 / \Delta = 3.$$

Пример. Решить систему линейных уравнений методом Гаусса.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 5 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -3 \\ 7x_1 + x_2 - x_3 = 10 \end{cases}$$

Составим расширенную матрицу системы.

$$A^* = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 5 \\ 1 & -2 & 3 & -3 \\ 7 & 1 & -1 & 10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -3 \\ 2 & 1 & -1 & 5 \\ 7 & 1 & -1 & 10 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -3 \\ 0 & 5 & -7 & 11 \\ 0 & 15 & -22 & 31 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -3 \\ 0 & 5 & -7 & 11 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Таким образом, исходная система может быть представлена в виде:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -3 \\ 5x_2 - 7x_3 = 11 \\ -x_3 = -2 \end{cases}, \text{ откуда получаем: } x_3 = 2; x_2 = 5; x_1 = 1.$$

Для самостоятельного решения:

Решить системы методом Гаусса и по формулам Крамера

$$\begin{cases} 5x - y - z = 0 \\ x + 2y + 3z = 14 \\ 4x + 3y + 2z = 16 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 3y - 6z = 12 \\ 3x + 2y + 5z = -10 \\ 2x + 5y - 3z = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 3y - 6z = 12 \\ 3x + 2y + 5z = -10 \\ 2x + 5y - 3z = 6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + 3y - 6z = 12 \\ 3x + 2y + 5z = -10 \\ 2x + 5y - 3z = 6 \end{cases}$$

Векторы

Пример. Найти $(5\vec{a} + 3\vec{b})(2\vec{a} - \vec{b})$, если $|\vec{a}| = 2$, $|\vec{b}| = 3$, $\vec{a} \perp \vec{b}$.

$$10\vec{a} \cdot \vec{a} - 5\vec{a} \cdot \vec{b} + 6\vec{a} \cdot \vec{b} - 3\vec{b} \cdot \vec{b} = 10|\vec{a}|^2 - 3|\vec{b}|^2 = 40 - 27 = 13,$$

т.к. $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2 = 4$, $\vec{b} \cdot \vec{b} = |\vec{b}|^2 = 9$, $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$.

Пример. Найти угол между векторами \vec{a} и \vec{b} , если $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$, $\vec{b} = 6\vec{i} + 4\vec{j} - 2\vec{k}$.

т.е. $\vec{a} = (1, 2, 3)$, $\vec{b} = (6, 4, -2)$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 6 + 8 - 6 = 8$:

$|\vec{a}| = \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14}$; $|\vec{b}| = \sqrt{36+16+4} = \sqrt{56}$.

$\cos \varphi = \frac{8}{\sqrt{14}\sqrt{56}} = \frac{8}{2\sqrt{14}\sqrt{14}} = \frac{4}{14} = \frac{2}{7}$; $\varphi = \arccos \frac{2}{7}$.

Пример. Найти скалярное произведение векторов $2\vec{a} + 3\vec{b} + 4\vec{c}$ и $5\vec{a} + 6\vec{b} + 7\vec{c}$, если $|\vec{a}| = 1$, $|\vec{b}| = 2$, $|\vec{c}| = 3$, $\vec{a} \wedge \vec{b} = \vec{a} \wedge \vec{c} = \vec{b} \wedge \vec{c} = \frac{\pi}{3}$.

$$\begin{aligned} (2\vec{a} + 3\vec{b} + 4\vec{c})(5\vec{a} + 6\vec{b} + 7\vec{c}) &= 10\vec{a} \cdot \vec{a} + 12\vec{a} \cdot \vec{b} + 14\vec{a} \cdot \vec{c} + 15\vec{a} \cdot \vec{b} + 18\vec{b} \cdot \vec{b} + 21\vec{b} \cdot \vec{c} + \\ &+ 20\vec{c} \cdot \vec{a} + 24\vec{b} \cdot \vec{c} + 28\vec{c} \cdot \vec{c} = 10\vec{a} \cdot \vec{a} + 27\vec{a} \cdot \vec{b} + 34\vec{a} \cdot \vec{c} + 45\vec{b} \cdot \vec{c} + 18\vec{b} \cdot \vec{b} + 28\vec{c} \cdot \vec{c} = 10 + \\ &+ 27 + 51 + 135 + 72 + 252 = 547. \end{aligned}$$

Пример. Найти векторное произведение векторов $\vec{a} = 2\vec{i} + 5\vec{j} + \vec{k}$ и $\vec{b} = \vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$.

$\vec{a} = (2, 5, 1)$; $\vec{b} = (1, 2, -3)$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = \vec{i} \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} - \vec{j} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} + \vec{k} \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -17\vec{i} + 7\vec{j} - \vec{k}.$$

Пример. Доказать, что векторы $\vec{a} = 7\vec{i} - 3\vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{b} = 3\vec{i} - 7\vec{j} + 8\vec{k}$ и $\vec{c} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$ компланарны.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & -7 & 8 \\ 7 & -3 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -4 & 5 \\ 0 & 4 & -5 \end{pmatrix}, \text{ т.к. векторы линейно зависимы, то они компланарны.}$$

Пример. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a} + 3\vec{b}$; $3\vec{a} + \vec{b}$, если $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 1$; $\vec{a} \wedge \vec{b} = 30^\circ$.

$$(\vec{a} + 3\vec{b}) \times (3\vec{a} + \vec{b}) = 3\vec{a} \times \vec{a} + \vec{a} \times \vec{b} + 9\vec{b} \times \vec{a} + 3\vec{b} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a} + 9\vec{b} \times \vec{a} = 8\vec{b} \times \vec{a}$$

$$S = 8|\vec{b}||\vec{a}|\sin 30^\circ = 4(\text{ед}^2).$$

Для самостоятельного решения:

Найти длину вектора $\vec{a} = 3\vec{i} - 4\vec{j}$

Даны векторы $\vec{a} = (-3; 4; 1)$ и $\vec{b} = (1; 1; 1)$. Найти скалярное произведение векторов

Даны векторы $\vec{a} = (-2; 3; 4)$ и $\vec{b} = (1; 1; 0)$. Найти векторное произведение векторов

Доказать, что векторы $\vec{a} = -\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} - 3\vec{j} - 4\vec{k}$ и $\vec{c} = -3\vec{i} + 12\vec{j} + 6\vec{k}$ компланарны.

Вычислить площадь треугольника с вершинами A(7,3,4), B(1, 0, 6), C(4, 5, -2).

Найти угол между векторами \vec{a} и \vec{b} , если $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} - 3\vec{k}$, $\vec{b} = 2\vec{i} + 4\vec{j} - \vec{k}$

Найти угол между векторами \vec{a} и \vec{b} , если $\vec{a} = 3\vec{i} + 4\vec{j} + 5\vec{k}$, $\vec{b} = 4\vec{i} + 5\vec{j} - 3\vec{k}$.

Вопросы к экзамену в 1 семестре

1. Середина отрезка.
2. Площадь треугольника.
3. Перевод прямоугольных координат в полярные координаты и наоборот.
4. Площадь многоугольника.
5. Прямая на плоскости (повторение).
6. Уравнение прямой с угловым коэффициентом.
7. Общее уравнение прямой.
8. Уравнений прямой, проходящей через точку в заданном направлении.
9. Уравнений прямой, проходящей через две точки.
10. Расстояние от точки до прямой.
11. Условие параллельности прямых.
12. Условие перпендикулярности прямых.
13. Формула угла между прямыми.
14. Уравнение окружности.
15. Каноническое уравнение эллипса
16. Исследование формы эллипса.
17. Каноническое уравнение гиперболы.
18. Исследование формы гиперболы.
19. Каноническое уравнение параболы.
20. Исследование формы параболы
21. Определители 2-го и 3-го порядков.
22. Свойства и правила вычисления определителей 2-го и 3-го порядков.
23. Миноры и алгебраические дополнения.
24. Вычисление определителя разложением по элементам ряда.
25. Вычисление определителя занулением элементов строки (столбца).
26. Понятие матрицы.
27. Виды матриц.
28. Линейные операции над матрицами.
29. Транспонирование и умножение матриц.
30. Свойства линейных операций над матрицами.
31. Свойства матриц.
32. Обратная матрица, способы ее вычисления.
33. Решение СЛАУ методом Крамера.
34. Решение СЛАУ методом Гаусса. Решение матричных уравнений (с нахождением обратной матрицы).

Семестр 2

Введение в анализ.

Найти область определения функции $y = \sqrt{4 - x^2}$:

Дана функция $f(x) = x^3 - 3x + 5$. Вычислить $f(-1)$:

Определить количество целых чисел, принадлежащих области определения

функции $f(x) = \frac{\sqrt{15 - x^2}}{x}$ равно:

Какая из функций задана неявно

$$y = x^3 y + 5x$$

$$y^2 x = x^3 y^2 + 5$$

$$x - y^3 = x^2 + y\sqrt{x}$$

нет правильного ответа

Предел и непрерывность функции

Пример: Найти предел $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1 + \ln x}{e^x - e}$.

Как видно, при попытке непосредственного вычисления предела получается неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Функции, входящие в числитель и знаменатель дроби удовлетворяют требованиям теоремы Лопиталья.

$$f'(x) = 2x + \frac{1}{x}; \quad g'(x) = e^x;$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{2x + \frac{1}{x}}{e^x} = \frac{2 + 1}{e} = \frac{3}{e};$$

Пример: Найти предел $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\pi - 2 \arctg x}{\frac{3}{e^x} - 1}$.

$$f'(x) = -\frac{2}{1 + x^2}; \quad g'(x) = e^{\frac{3}{x}} \cdot \frac{-3}{x^2};$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left[-\frac{2x^2}{(1 + x^2)e^{\frac{3}{x}}(-3)} \right] = \frac{-2}{(0 + 1) \cdot 1 \cdot (-3)} = \frac{2}{3}.$$

Если при решении примера после применения правила Лопиталья попытка вычислить предел опять приводит к неопределенности, то правило Лопиталья может быть применено второй раз, третий и т.д. пока не будет получен результат. Естественно, это возможно только в том случае, если вновь полученные функции в свою очередь удовлетворяют требованиям теоремы Лопиталья.

Пример: Найти предел $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x e^{\frac{x}{2}}}{x + e^x}$.

$$f'(x) = e^{\frac{x}{2}} \left(1 + \frac{1}{2}x\right); \quad g'(x) = 1 + e^x;$$

$$f''(x) = \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}} + \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}} + \frac{x}{4}e^{\frac{x}{2}} = \frac{1}{4}e^{\frac{x}{2}}(4+x); \quad g''(x) = e^x;$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{4}e^{\frac{x}{2}}(4+x)}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{4}(4+x)}{e^{\frac{x}{2}}}$$

$$f'''(x) = \frac{1}{4}; \quad g'''(x) = \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2e^{\frac{x}{2}}} = 0;$$

Пример: Найти предел $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{e^{2x}}$.

$$f'(x) = 2x; \quad g'(x) = 2e^{2x}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{e^{2x}} = \frac{\infty}{\infty}; - \text{ получили неопределенность.}$$

Применяем правило Лопиталя еще раз.

$$f''(x) = 2; \quad g'(x) = 4e^{2x}; \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{2e^{2x}} = \frac{1}{\infty} = 0;$$

Для самостоятельного решения

$$\text{Найти } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 3x + 4}{5 - 2x - 2\sqrt{x^4 + 1}};$$

$$\text{Найти } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2\sqrt{x^6 + 2} - 3x^2 + 4}{3x^3 - x^2};$$

$$\text{Найти } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 - x + 2}{2x^2 + \sqrt{4x^6 - 1}};$$

$$\text{Найти } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{7^{2x} - 5^{3x}}{2x - \arctg 3x}$$

Дифференциальное исчисление.

Производная

Пример. Найти производную функции $f(x) = (x^2 + 3x)^{x \cos x}$.

По полученной выше формуле получаем: $u = x^2 + 3x$; $v = x \cos x$;

Производные этих функций: $u' = 2x + 3$; $v' = \cos x - x \sin x$;

Окончательно:

$$f'(x) = x \cos x \cdot (x^2 + 3x)^{x \cos x - 1} \cdot (2x + 3) + (x^2 + 3x)^{x \cos x} (\cos x - x \sin x) \ln(x^2 + 3x)$$

Пример. Найти производную функции $y = \ln \operatorname{tg} \frac{x}{2} - \frac{x}{\sin x}$

$$y' = \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}} \cdot \frac{1}{2} - \frac{\sin x - x \cos x}{\sin^2 x} = \frac{1}{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} - \frac{\sin x - x \cos x}{\sin^2 x} = \frac{\sin x - \sin x + x \cos x}{\sin^2 x} =$$

$$= \frac{x \cos x}{\sin^2 x}$$

Пример. Найти производную функции $y = x^2 e^{x^2} \ln x$

$$y' = (x^2 e^{x^2})' \ln x + x^2 e^{x^2} \frac{1}{x} = (2x e^{x^2} + x^2 e^{x^2} 2x) \ln x + x e^{x^2} = 2x e^{x^2} (1 + x^2) \ln x + x e^{x^2} =$$

$$= x e^{x^2} (1 + 2 \ln x + 2x^2 \ln x)$$

Для самостоятельного решения

Найти производную: $y = \operatorname{ctg} \sqrt{x}$

Найти производную: $y = \operatorname{tg}(x+3)$

Найти производную: $y = e^{\sqrt{x}}$

Найти производную: $y = 6^{7x}$

Найти производную: $y = \sin x \cdot e^x$

Найти производную: $y = (2x+3)^3$

Найти производную: $y = e^{3-2x}$

Найти производную: $y = \log_3(\ln^4 x)$.

Найти производную: $y = (\cos x)^{e^4}$.

Найти производную: $y = \operatorname{arctg}(\sqrt[4]{x+2})$.

Приложения производной.

Пример. Найти асимптоты и построить график функции $y = \frac{x^2 + 2x - 1}{x}$.

1) Вертикальные асимптоты: $y \rightarrow +\infty, x \rightarrow 0-0$; $y \rightarrow -\infty, x \rightarrow 0+0$, следовательно, $x = 0$ - вертикальная асимптота.

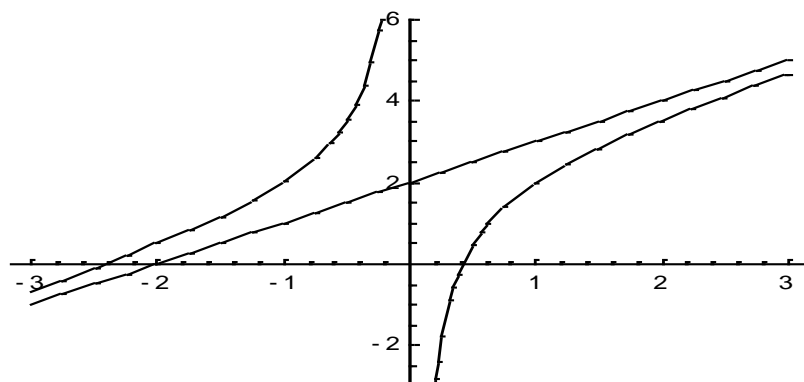
2) Наклонные асимптоты:

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + 2x - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} \right) = 1$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 2x - 1}{x} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + 2x - 1 - x^2}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x - 1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(2 - \frac{1}{x} \right) = 2$$

Таким образом, прямая $y = x + 2$ является наклонной асимптотой.

Построим график функции:



Пример: Исследовать функцию $y = \frac{x^3 + 4}{x^2}$ и построить ее график.

1. Областью определения функции являются все значения x , кроме $x = 0$.
2. Функция является функцией общего вида в смысле четности и нечетности.
3. Точки пересечения с координатными осями: с осью Ox : $y = 0$; $x = -\sqrt[3]{4}$
с осью Oy : $x = 0$; y – не существует.
4. Точка $x = 0$ является точкой разрыва $\lim_{x \rightarrow 0} y = \infty$, следовательно, прямая $x = 0$ является вертикальной асимптотой.

Наклонные асимптоты ищем в виде: $y = kx + b$.

$$k = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 4}{x^3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{4}{x^3} \right) = 1$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - kx) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3 + 4}{x^2} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4}{x^3} = 0.$$

Наклонная асимптота $y = x$.

5. Находим точки экстремума функции.

$$y' = 1 - \frac{8}{x^3}; \quad y' = 0 \text{ при } x = 2, \quad y' = \infty \text{ при } x = 0.$$

$y' > 0$ при $x \in (-\infty, 0)$ – функция возрастает,

$y' < 0$ при $x \in (0, 2)$ – функция убывает,

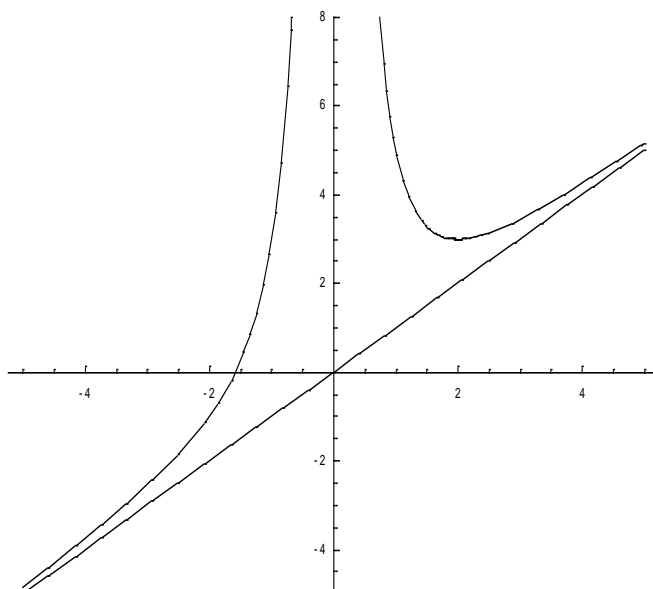
$y' > 0$ при $x \in (2, \infty)$ – функция возрастает.

Таким образом, точка $(2, 3)$ является точкой минимума.

Для определения характера выпуклости/вогнутости функции находим вторую производную.

$y'' = \frac{24}{x^4} > 0$ при любом $x \neq 0$, следовательно, функция, вогнутая на всей области определения.

6. Построим график функции.



Для самостоятельного решения

Исследовать функцию. $y = \frac{x^2 - 2x + 3}{x + 2}$ и построить ее график.

Интегральное исчисление.

Неопределенный интеграл.

Пример. Найти неопределенный интеграл $\int \sqrt{\sin x} \cos x dx$.

Сделаем замену $t = \sin x$, $dt = \cos x dx$.

$$\int \sqrt{t} dt = \int t^{1/2} dt = \frac{2}{3} t^{3/2} + C = \frac{2}{3} \sin^{3/2} x + C.$$

Пример. $\int x(x^2 + 1)^{3/2} dx$.

Замена $t = x^2 + 1$; $dt = 2x dx$; $dx = \frac{dt}{2x}$; Получаем:

$$\int t^{3/2} \frac{dt}{2} = \frac{1}{2} \int t^{3/2} dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5} t^{5/2} + C = \frac{t^{5/2}}{5} + C = \frac{(x^2 + 1)^{5/2}}{5} + C;$$

Пример. $\int x^2 \sin x dx = \left\{ \begin{array}{l} u = x^2; \quad dv = \sin x dx; \\ du = 2x dx; \quad v = -\cos x \end{array} \right\} = -x^2 \cos x + \int \cos x \cdot 2x dx =$

$$= \left\{ \begin{array}{l} u = x; \quad dv = \cos x dx; \\ du = dx; \quad v = \sin x \end{array} \right\} = -x^2 \cos x + 2 \left[x \sin x - \int \sin x dx \right] = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x + C.$$

Пример.

$$\int \sin 7x \sin 2x dx = \frac{1}{2} \int \cos 5x dx - \frac{1}{2} \int \cos 9x dx = \frac{1}{10} \sin 5x - \frac{1}{18} \sin 9x + C.$$

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x \cos^2 x} = \int \frac{4dx}{\sin^2 2x} = \left\{ \frac{d \operatorname{ctg} 2x}{dx} = \frac{-2}{\sin^2 x} \right\} = -2 \operatorname{ctg} 2x + C$$

Для самостоятельного решения

Найти интегралы:

$$\int x^2 \operatorname{arctg} x dx.$$

$$\int \frac{x^3 + 1}{x^2 - x} dx.$$

$$\int \frac{x^3 + 6x^2 + 13x + 9}{(x+1)(x+2)^3} dx.$$

$$\int \frac{5x^4 - x^3 + 4x^2 + 8}{x^3 - 8} dx.$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + x - 1}}.$$

$$\int \frac{\cos^2 x}{\sin^6 x} dx.$$

$$\int \frac{\sin^3 x}{4 + \cos x} dx.$$

Определенный интеграл

Пример.

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx &= \left\{ \begin{array}{l} x = \sin t; \\ \alpha = 0; \beta = \pi/2 \end{array} \right\} = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sin^2 t} \cos t dt = \int_0^{\pi/2} \cos^2 t dt = \frac{1}{2} \int_0^{\pi/2} (1 + \cos 2t) dt = \\ &= \frac{1}{2} \left(t + \frac{1}{2} \sin 2t \right) \Big|_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{4} \sin \pi = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

Для самостоятельного решения

Найти интегралы:

$$\int_1^2 \frac{x^2 - 2}{x^2} dx \quad \int_1^2 e^x \left(\frac{1}{e^x} - \frac{2e^{-x}}{x^2} \right) dx$$

$$\int_1^2 a^x \left(\frac{1}{a^x} - \frac{2a^{-x}}{x^2} \right) dx \quad \int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} dx$$

$$\int_0^{\pi} 2 \cos \frac{x}{2} dx \quad \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{1}{\sin^2 \frac{x}{2}} dx$$

Дифференциальные уравнения

Пример. Найти общее решение дифференциального уравнения: $yy' = \frac{-2x}{\cos y}$

$$y \cos y \cdot \frac{dy}{dx} = -2x$$

$$y \cos y dy = -2x dx$$

$$\int y \cos y dy = -2 \int x dx$$

Интеграл, стоящий в левой части, берется по частям

$$\int y \cos y dy = \left\{ \begin{array}{l} u = y; \quad dv = \cos y dy; \\ du = dy; \quad v = \sin y \end{array} \right\} = y \sin y - \int \sin y dy = y \sin y + \cos y$$

$$y \sin y + \cos y = -x^2 + C$$

$$y \sin y + \cos y + x^2 + C = 0$$

- это есть общий интеграл исходного дифференциального уравнения, т.к. искомая функция и не выражена через независимую переменную. В этом и заключается **отличие** общего (частного) **интеграла** от общего (частного) **решения**.

Пример. Найти решение дифференциального уравнения $\frac{y}{y'} = \ln y$ при условии

$$y(2) = 1.$$

$$\frac{y dx}{dy} = \ln y$$

$$dx = \frac{\ln y dy}{y}$$

$$\int dx = \int \frac{\ln y dy}{y}$$

$$x + C = \int \ln y d(\ln y)$$

$$x + C = \frac{\ln^2 y}{2}$$

при $y(2) = 1$ получаем $2 + C = \frac{\ln^2 1}{2}; \Rightarrow 2 + C = 0; \Rightarrow C = -2;$

Итого: $2(x - 2) = \ln^2 y$; или $y = e^{\pm\sqrt{2x-4}}$ - частное решение;

Проверка: $y' = e^{\pm\sqrt{2x-4}} \cdot \frac{2}{\pm 2\sqrt{2x-4}}$, итого

$$- \frac{y}{y'} = \frac{e^{\pm\sqrt{2x-4}} (\pm\sqrt{2x-4})}{e^{\pm\sqrt{2x-4}}} = \pm\sqrt{2x-4} = \ln y - \text{верно.}$$

Пример. Решить уравнение $y' = y^{\frac{2}{3}}$.

$$\frac{dy}{dx} = y^{\frac{2}{3}}$$

$$y^{-\frac{2}{3}} dy = dx$$

$$\int y^{-\frac{2}{3}} dy = \int dx$$

$$3y^{\frac{1}{3}} = x + C$$

$$27y = (x + C)^3 - \text{общий интеграл}$$

$$y = \frac{1}{27} (x + C)^3 - \text{общее решение}$$

Пример. Решить уравнение $y' = x(y^2 + 1)$.

$$\frac{dy}{y^2 + 1} = dx; \quad \int \frac{dy}{y^2 + 1} = \int dx;$$

$$\arctg y = \frac{x^2}{2} + C; \quad y = \operatorname{tg} \left(\frac{x^2}{2} + C \right);$$

Для самостоятельного решения

Решить дифференциальное уравнение $dx = dy(3 + 2x)$:

Решить дифференциальное уравнение: $yx^2 y' = \sqrt{x}$

Решить дифференциальное уравнение: $y'' + 2x(y')^2 = 0$

Решить дифференциальное уравнение: $(3x - 1)dy = y^2 dx$

Решить дифференциальное уравнение: $y'' = \sin 3x$

Решить дифференциальное уравнение: $(1+x^2)dy = (y^2-1)dx$

Решить дифференциальное уравнение: $y'' - 6y' + 5y = 0$

Решить дифференциальное уравнение: $y' = 2\sqrt{y}e^{2x}$

Решить дифференциальное уравнение: $(x-3)y'' - y' = 0$

Решить дифференциальное уравнение: $y'' - 5y' + 6y = e^x$

Числовые ряды

Пример. Определить сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n}$.

$$u_n = \frac{n}{2^n}; \quad u_{n+1} = \frac{n+1}{2^{n+1}}; \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)2^n}{2^{n+1}n} = \frac{n+1}{2n} = \frac{1+\frac{1}{n}}{2} = \frac{1}{2} < 1$$

Вывод: ряд сходится.

Пример. Исследовать на сходимость ряд $x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{x^n}{n} + \dots$

Применяем признак Даламбера:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{\frac{x^{n+1}}{n+1}}{\frac{x^n}{n}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{xn}{n+1} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x}{1+\frac{1}{n}} \right| = |x|.$$

Получаем, что этот ряд сходится при $|x| < 1$ и расходится при $|x| > 1$.

Теперь определим сходимость в граничных точках 1 и -1.

При $x = -1$: $-1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \dots$ ряд сходится по признаку Лейбница

При $x = 1$: $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$ ряд расходится (гармонический ряд).

Для самостоятельного решения

Исследовать сходимость ряда с помощью предельного признака (эталонный ряд

$$\alpha_n = \frac{1}{n^\alpha}): \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n^2+3}{n^4-1}$$

Исследовать сходимость ряда с помощью предельного признака (эталонный

$$\text{ряд } b_n = \frac{1}{n^\alpha}): \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n + \sqrt{n^2 + 3n}}{\sqrt[3]{n^6 - 2} + \sqrt{n^2 + 10}}$$

Исследовать сходимость ряда по признаку Даламбера: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n - 1}$

Найти условную или абсолютную сходимость ряда: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+3}$

Найти условную или абсолютную сходимость ряда: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n n}{5n+1}$

Степенные ряды

Пример. Найти область сходимости ряда $x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$

Находим

радиус

сходимости

$$R = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n-1}}{a_n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n-1)!}{\frac{1}{n!}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{n!}{(n-1)!} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} |n| = |\infty|.$$

Следовательно, данный ряд сходится при любом значении x . Общий член этого ряда стремится к нулю.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x^n}{n!} = 0.$$

Для самостоятельного решения

Найти область сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{5^n \cdot n}$

Найти длину интервала сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2^n \cdot (n+1)}$

Найти длину интервала сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{4^n \cdot (n+1)}$

Функции многих переменных

Пример. Найти полный дифференциал функции $z = \frac{y}{x^2 - y^2}$.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-2yx}{(x^2 - y^2)^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y'(x^2 - y^2) - y(-2y)}{(x^2 - y^2)^2} = \frac{x^2 - y^2 + 2y^2}{(x^2 - y^2)^2} = \frac{x^2 + y^2}{(x^2 - y^2)^2}$$

$$dz = -\frac{2xy}{(x^2 - y^2)} dx + \frac{x^2 + y^2}{(x^2 - y^2)^2} dy$$

Для самостоятельного решения

Найти частные производные 2-го порядка функции $z = x^2 - 5y - 4x + xy + y^2$

Найти экстремум функции $z = xy - 4y + 2x^2 - 2x - 2y^2$

Найти полный дифференциал функции $z = \sqrt{\frac{y}{x}} - x^2 y^2$ при $x=1, y=2, dx=0,1, dy=0$,

Найти полный дифференциал функции $z = 1 + 10xy + y + 2\sqrt{x} - 2y^3$

1. Найти пределы числовых последовательностей:

а) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n}$; б) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^3 - (n-1)^3}{(n+1)^2 + (n-1)^2}$; в) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} (1+2+3+\dots+n)$.

2. Найти пределы функций:

а) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2+5}{x^2-3}$; б) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^2-5x+2}{x^2-4}$; в) $\lim_{x \rightarrow 1/2} \frac{8x^3-1}{6x^2-5x+1}$; г) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3+x-2}{x^3-x^2-x+1}$;
д) $\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right)$; е) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3+x}{x^4-3x^2+1}$; ж) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1+x-3x^3}{3x^3+x^2+1}$; з) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^3}{x^2+1} - x \right)$;

3. Вычислить пределы функций:

а) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{x}$; б) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x^2}-1}{\sqrt{x^2+16}-4}$; в) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$; г) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{x}$;
д) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} 2x}{\sin 5x}$; е) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \sin x}{3x}$; ж) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$; з) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1-\cos^3 x}{x \sin 2x}$;
и) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x}{1+x} \right)^x$; к) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2+1}{x^2-1} \right)^{x^2}$; л) $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{2x+1}{x-1} \right)^x$; м) $\lim_{x \rightarrow 0} (1+\sin x)^{\frac{1}{x}}$.

Контрольная работа по теме «Дифференциальное исчисление. Производная»

1. Вычислить производные следующих функций:

а) $y = \sqrt{x}(x^3 - \sqrt{x} + 1)$; б) $y = \frac{1+\sqrt{x}}{1+\sqrt{2x}}$; в) $y = \sqrt{\frac{1-x^2}{1+x^2}}$; г) $y = \frac{x}{\sin x + \cos x}$;
д) $y = \frac{1}{3} \operatorname{tg}^3 x - \operatorname{tg} x + x$; е) $y = \frac{\arccos x}{x}$; ж) $y = \ln \operatorname{tg} x$; з) $y = \operatorname{arctg} \ln(3x-1)$;
и) $y = \ln \operatorname{arctg} \frac{1}{1+x}$; к) $y = \arcsin x + \sqrt{1-x^2}$; л) $y = \ln \frac{1-e^x}{e^x}$.

2. Найти уравнение касательной к функции $y = x - \frac{1}{x}$ в точке $x_0 = 1$.

3. Найти тангенс угла наклона касательной к функции $y = \operatorname{tg}^2 x$ в точке $x = \frac{\pi}{4}$ к положительному направлению оси Ох.

4. Найти экстремумы функции $y = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 5x - 1$.

5. Найти промежутки возрастания и убывания функции $y = \frac{2x-1}{x+1}$.

6. Найти промежутки выпуклости и вогнутости функции $y = \ln \frac{1-x}{1+x}$.

7. Найти дифференциал функции $y = (x^2 + 4x + 1)(x^2 - \sqrt{x})$.

8. Исследовать построить график функции $y = \frac{x^2+4}{x^2-4}$.

Контрольная работа по теме «Интегральное исчисление. Неопределенный интеграл»

Вычислить интегралы следующих функций:

- 1) $\int \sqrt[3]{(8-3x)^2} dx$; 2) $\int \frac{x dx}{\sqrt{x^2+1}}$; 3) $\int \frac{\sin x dx}{\cos^2 x}$; 4) $\int \frac{\sqrt{\ln x} dx}{x}$; 5) $\int \frac{dx}{2x-1}$; 6) $\int \frac{dx}{x^2-3x+2}$;
7) $\int x \sin 2x dx$; 8) $\int x e^{-x} dx$; 9) $\int \frac{dx}{1+\sqrt{x+1}}$; 10) $\int \frac{(x+1) dx}{x\sqrt{x-2}}$;

Контрольная работа по теме «Интегральное исчисление. Определенный интеграл»

1. Вычислить интегралы:

- 1) $\int_0^1 \sqrt{1+x} dx$; 2) $\int_0^1 \frac{x dx}{(x^2+1)^2}$; 3) $\int_1^e \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$; 4) $\int_2^3 \frac{dx}{2x^2+3x-2}$; 5) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^5 x \sin 2x dx$;
6) $\int_0^1 x e^{-x} dx$; 7) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x \cos x dx$; 8) $\int_0^{e-1} \ln(x+1) dx$; 9) $\int_{\frac{1}{\pi}}^{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin \frac{1}{x}}{x^2} dx$; 10) $\int_0^1 \frac{dx}{x^2+4x+5}$.

2. Найти площадь кривой, ограниченной линиями: $y = 3x^2$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 1$.

Контрольная работа по теме «Дифференциальные уравнения»

1. Решить дифференциальные уравнения 1-го порядка:

- 1) $xy' = x+1$; 2) $y dy = (x^2 - 2x) dx$; 3) $xyy' = \ln x$.

2. Решить дифференциальные уравнения 2-го порядка, допускающие понижение порядка: $xy'' - y' = 1$;

3. Решить дифференциальные уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициентами:

- 1) $y'' + 3y' + 2y = 0$; 2) $y'' - 8y' + 16 = 0$; 3) $y'' + 2y' + 5y = 0$.

Контрольная работа по теме «Функции многих переменных»

Найти частные производные и дифференциал функций:

- 1) $z = x^3 y - y^3 x$; 2) $z = x\sqrt{y} + \frac{y}{\sqrt[3]{x}}$; 3) $u = \ln(x+y+z)$.

Вопросы к зачету с оценкой во 2 семестре

1. Понятие предела последовательности.
2. Свойства предела последовательности.
3. Понятие бесконечно малых и бесконечно больших величин.
4. Понятие функции.
5. Область определения, область значений функции.
6. Простейшие функциональные зависимости.
7. Графики основных элементарных функций (повторение).
8. Способы задания функции.
9. Обратные функции.
10. Явно и неявно заданная функция.
11. Предел функции.
12. Свойства пределов.
13. Раскрытие некоторых видов неопределенностей.
14. Первый замечательный предел.
15. Число e (число Эйлера). Второй замечательный предел.
16. Понятие непрерывности функции.
17. Классификация разрывов функции.
18. Горизонтальная, вертикальная и наклонная асимптоты.
19. Понятие производной.
20. Физический и геометрический смысл производной.
21. Основные правила дифференцирования (умножение на число, суммы).
22. Основные правила дифференцирования (произведения, частного).
23. Таблица производных.
24. Производная сложной функции. Правило цепочки.
25. Производные высшего порядка, их вычисление.
26. Правило Лопиталя.
27. Монотонность и экстремум функции: достаточные условия.
28. Выпуклость и перегиб графика функции: достаточные условия.
29. Исследование функции и построение графика.
30. Дифференциал первого порядка, свойства.
31. Дифференциалы высшего порядка.
32. Понятие первообразной и неопределенного интеграла.
33. Свойства неопределенного интеграла.
34. Таблица неопределенных интегралов.
35. Вычисление интегралов с помощью свойств и таблицы.
36. Приведение интеграла к самому себе.
37. Вычисление интегралов методом замены переменной и занесения под дифференциал.
38. Интегрирование квадратного трехчлена в знаменателе дроби и под корнем.
39. Метод интегрирования по частям.
40. Интегрирование иррациональных функций: метод рационализации выражения.
41. Понятие определенного интеграла и его свойства. Геометрический смысл определенного интеграла.
42. Формула Ньютона-Лейбница.
43. Методы интегрирования по частям и замены переменной для вычисления определенного интеграла.
44. Геометрические и физические приложения определенного интеграла.
45. Механический смысл определенного интеграла.
46. Основные понятия дифференциальных уравнений.

47. Уравнения 1-го порядка с разделяющимися переменными.
48. Однородные уравнения 1-го порядка.
49. Линейные уравнения 1-го порядка.
50. Линейные уравнения 2-го порядка с постоянными коэффициента
51. Понятие ФМП.
52. Частные производные.
53. Понятие полного дифференциала функции.

Критерии оценивания представлены в таблице 8.1.

Методика формирования результирующей оценки

Таблица 8.1

Этап	Форма контроля	Критерии оценивания			
1. Текущий контроль (max 20 баллов за 1 модуль)					
		4 балла	3 балла	2 балла	0–1 баллов
	Посещение занятий (max 4 б.)	Студент посетил более 85% занятий	Студент посетил 71–85% занятий	Студент посетил 56–70% занятий	Студент посетил менее 56% занятий
		11–13 баллов	8–10 баллов	6–7 баллов	0–5 баллов
	Текущая работа в течение модуля (max 13б.)	Студент активно работает на занятиях, превосходно выполняет все задания преподавателя.	Студент активно работает на занятиях, хорошо выполняет задания преподавателя.	Студент недостаточно активно работает на занятиях, удовлетворительно выполняет задания преподавателя.	Студент недостаточно активно работает на занятиях, неудовлетворительно выполняет задания преподавателя.
		3 балла	2 балла	1 балл	0 баллов
	Доклад, презентация (max 3б.) / опорный конспект (max 3б.)	Тема полностью раскрыта. Превосходное владение материалом. Высокий уровень самостоятельности, логичности, аргументированности. Превосходный стиль изложения.	Тема в основном раскрыта. Хорошее владение материалом. Средний уровень самостоятельности, логичности, аргументированности. Хороший стиль изложения.	Тема частично раскрыта. Удовлетворительное владение материалом. Низкий уровень самостоятельности, логичности, аргументированности. Удовлетворительный стиль изложения.	Тема не раскрыта. Неудовлетворительное владение материалом. Недостаточный уровень самостоятельности, логичности, аргументированности. Неудовлетворительный стиль изложения.
2. Рубежный контроль (15б. за 1 модуль)					
		13–15 баллов	10–12 балл	8–9 баллов	0–7 баллов
	Контрольная работа	Правильно выполнены все задания. Продemonстрирован высокий уровень владения материалом. Проявлены превосходные способности применять знания и умения к	Правильно выполнена большая часть заданий. Присутствуют незначительные ошибки. Продemonстрирован хороший уровень владения материалом. Проявлены средние способности	Задания выполнены более чем наполовину. Присутствуют серьезные ошибки. Продemonстрирован удовлетворительный уровень владения материалом.	Задания выполнены менее чем наполовину. Продemonстрирован неудовлетворительный уровень владения материалом. Проявлены недостаточные способности применять знания и умения к

		выполнению конкретных заданий.	применять знания и умения к выполнению конкретных заданий.	Проявлены низкие способности применять знания и умения к выполнению конкретных заданий.	выполнению конкретных заданий.
3. Итоговый контроль по дисциплине					
		26–30 баллов	20–25 балла	15–19 баллов	0–14 баллов
	Экзамен/зачет	Дан полный, развернутый ответ на поставленный вопрос. Ответ формулируется в терминах науки, изложен литературным языком, логичен, доказателен, демонстрирует авторскую позицию студента.	Дан полный ответ на поставленный вопрос, показано умение выделить существенные и несущественные признаки, причинно-следственные связи. Но допущены незначительные ошибки, исправленные студентом с помощью «наводящих» вопросов преподавателя.	Дан недостаточно полный ответ. Студент не способен самостоятельно выделить существенные и несущественные признаки и причинно-следственные связи. Речевое оформление требует поправок, коррекции.	Не получены ответы по базовым вопросам дисциплины или дан неполный ответ и допущены грубые ошибки. Речь неграмотная. Уточняющие вопросы преподавателя не приводят к коррекции ответа студента не только на поставленный вопрос, но и на другие вопросы дисциплины.

Студенты, получившие в ходе текущего и рубежного контроля 50-70 баллов, автоматически получают «Зачет» или оценку «удовлетворительно». Для получения более высокого балла («хорошо» или «отлично») студент обязан явиться на экзамен и сдавать экзамен по шкале от 0-30 баллов в дополнение к накопленным за семестр баллам.

Показатели и критерии оценивания компетенций на различных этапах их формирования, описание шкал оценивания

Уровень сформированности компетенций			
«Минимальный уровень не достигнут» (менее 50 баллов)	«Минимальный уровень» (50-70 баллов)	«Средний уровень» (71-85 баллов)	«Высокий уровень» (86-100 баллов)
<u>Компетенции не сформированы.</u> Знания отсутствуют, умения и навыки не сформированы.	<u>Компетенции сформированы.</u> Сформированы базовые структуры знаний. Умения фрагментарны и носят репродуктивный характер. Демонстрируется низкий уровень самостоятельности практического навыка.	<u>Компетенции сформированы.</u> Знания обширные, системные. Умения носят репродуктивный характер, применяются к решению типовых заданий. Демонстрируется достаточный уровень самостоятельности	<u>Компетенции сформированы.</u> Знания твердые, аргументированные, всесторонние. Умения успешно применяются к решению как типовых, так и нестандартных творческих заданий. Демонстрируется высокий уровень самостоятельности,

		устойчивого практического навыка.	высокая адаптивность практического навыка
Описание критериев оценивания			
<p>Обучающийся демонстрирует:</p> <ul style="list-style-type: none"> - существенные пробелы в знаниях учебного материала; - допускаются принципиальные ошибки при ответе на основные вопросы, отсутствует знание и понимание основных понятий и категорий; - непонимание сущности дополнительных вопросов в рамках заданий; - отсутствие умения выполнять практические задания, предусмотренные программой дисциплины; - отсутствие готовности (способности) к дискуссии и низкую степень контактности. 	<p>Обучающийся демонстрирует:</p> <ul style="list-style-type: none"> - знания теоретического материала; - неполные ответы на основные вопросы, ошибки в ответе, недостаточное понимание сущности излагаемых вопросов; - неуверенные и неточные ответы на дополнительные вопросы; - недостаточное владение литературой, рекомендованной программой дисциплины; - умение без грубых ошибок решать практические задания, которые следует выполнить. 	<p>Обучающийся демонстрирует:</p> <ul style="list-style-type: none"> - знание и понимание основных вопросов контролируемого объема программного материала; - твердые знания теоретического материала. - способность устанавливать и объяснять связь практики и теории, выявлять противоречия, проблемы и тенденции развития; - правильные и конкретные, без грубых ошибок, ответы на поставленные вопросы; - умение решать практические задания, которые следует выполнить; - владение основной литературой, рекомендованной программой дисциплины; - наличие собственной обоснованной позиции по обсуждаемым вопросам. Возможны незначительные оговорки и неточности в раскрытии отдельных положений вопросов, присутствует неуверенность в ответах. 	<p>Обучающийся демонстрирует:</p> <ul style="list-style-type: none"> - глубокие, всесторонние и аргументированные знания программного материала; - полное понимание сущности и взаимосвязи рассматриваемых процессов и явлений, точное знание основных понятий в рамках обсуждаемых заданий; - способность устанавливать и объяснять связь практики и теории; - логически последовательные, содержательные, конкретные и исчерпывающие ответы на все задания, а также дополнительные вопросы экзаменатора; - умение решать практические задания; - свободное использование в ответах на вопросы материалов рекомендованной основной и дополнительной литературы.
Оценка «неудовлетворительно » /не зачтено	Оценка «удовлетворительно » / «зачтено»	Оценка «хорошо» / «зачтено»	Оценка «отлично» / «зачтено»

9. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины (модуля)

а) Основная литература

1. Кремер, Н. Ш. Линейная алгебра : учебник и практикум для вузов / под редакцией Н. Ш. Кремера. — 3-е изд., испр. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2020. — 422 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-08547-1. — Текст : электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/450038>
2. Минорский Василий Павлович
Сборник задач по высшей математике, учебное пособие Физико-матем.лит-ры, 2010
3. Пахомова, Е. Г. Линейная алгебра и аналитическая геометрия. Сборник заданий : учебное пособие для вузов / Е. Г. Пахомова, С. В. Рожкова. — Москва : Издательство Юрайт, 2020. — 110 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-08428-3. — Текст : электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/451426>
4. Линейная алгебра и аналитическая геометрия : учебник и практикум для вузов / Е. Г. Плотникова, А. П. Иванов, В. В. Логинова, А. В. Морозова ; под редакцией Е. Г. Плотниковой. — Москва : Издательство Юрайт, 2020. — 340 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-01179-1. — Текст : электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/450619>
5. Высшая математика для экономистов. Под ред. Кремера Н.Ш. ЮНИТИ-ДАНА. 2010

б) Дополнительная литература

6. Лубягина, Е. Н. Линейная алгебра : учебное пособие для вузов / Е. Н. Лубягина, Е. М. Вечтомов. — 2-е изд. — Москва : Издательство Юрайт, 2020. — 150 с. — (Высшее образование). — ISBN 978-5-534-10594-0. — Текст : электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/456440>
7. Письменный, Дмитрий Трофимович
Конспект лекций по высшей математике. В 2-х ч. Айрис-пресс, 2011

в) программное обеспечение, ЭБС, профессиональные базы и Интернет-ресурсы:

- необходимый для обеспечения данной дисциплины комплект лицензионного и свободно распространяемого программного обеспечения, в том числе отечественного производства, а также электронные библиотечные системы, с которыми у СОГУ имеется действующий договор:

№ п/п	Наименование	№ договора(лицензия)	Страна-производитель
1.	Windows 10 Enterprise	№ 4100072800 Microsoft Products (MPSA) от 04.2016г	США
2.	Windows 7 Professional	№ 4100072800 Microsoft Products (MPSA) от 04.2016г	США
3.	Office Standard 2016	№ 4100072800 Microsoft Products (MPSA) от 04.2016г	США
4.	Система тестирования Sunrav WEB Class	№468 от 03.12.2013 ИП Сунгатулин Р.Т.(бессрочно)	Россия

5.	Программное обеспечение 1С: Предприятие. Бухгалтерский Учет. Типовая конфигурация 8 сетевая версия	№ СД/108 от 29.08.2017 (максимум-софт) бессрочно	Россия
6.	Система компьютерной верстки MikTex	Лицензия FSF/Debian (Свободное программное обеспечение) (бессрочно)	
7.	Kaspersky Endpoint Security	До 22.01.2024	Россия
8.	Система поиска текстовых заимствований «Антиплагиат.ВУЗ»	№ от 22.01.2043 (действителен до 22.01.2025) с ОАО «Анти-Плагиат»	Россия
9.	Автоматизированная система «Управление –Деканат БРС»	Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2015611830 от 06.02.2015г.(бессрочно)	СОГУ
10.	Программа для ЭВМ «Банк вопросов для контроля знаний»	Разработка СОГУ Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ №2015611829 от 06.02.2015г. (бессрочно)	СОГУ
11.	Планы ВО	№2191-24, от 12.01.2024 г. (тех.поддержка до 26.02.2025 г.) ООО ЛММИС	Россия
12.	VSDESK	№ 210406/01 от 06.04.2021г. ИП И,А.Сергеевич	Россия
13.	DIRECTUM RX – Система электронного документооборота	ООО Галактика ИТ договор № 120320/Д/А от 14.03.2022	Россия
14.	MOODLE	Бесплатное	США (бесплатное российское)
15.	Личный кабинет студента/сотрудника	Лицензия бессрочная	Россия
16.	Электронная библиотека диссертации и авторефератов РГБ(ЭБД РГБ)	https://dvs.rsl.ru Требуется регистрация в библиотеке СОГУ	Россия
17.	ЭБС"Университетская библиотека ONLINE"	https://biblioclub.ru Требуется регистрация в библиотеке СОГУ	Россия
18.	ЭБС «Научная электронная библиотека eLibrary.ru»	http://elibrary.ru . Требуется регистрация в библиотеке СОГУ	Россия
19.	Универсальная баз данных East View	https://dlib.eastview.com	США
20.	ЭБС «Юрайт» - образовательная среда, включающая виртуальный	www.biblio-online.ru Требуется регистрация в	Россия

	читальный зал учебников и учебных пособий от авторов из ведущих вузов России по всем направлениям и специальностям	библиотеке СОГУ	
--	--	-----------------	--

10. Материально-техническое оснащение дисциплины

Проведение лекционных и семинарских занятий по дисциплине осуществляется в следующих аудиториях:

<p>Учебные аудитории для проведения занятий лекционного типа: преподавательский стол; стул; столы обучающихся; стулья; кафедра; классная доска, демонстрационное оборудование - мультимедийный комплекс (проектор, экран), ноутбук, колонки, программное обеспечение: Windows 8.1 Professional; Office Standard 2010; Антивирусное программное обеспечение Kaspersky Total Security; Система поиска текстовых заимствований «Антиплагиат.ВУЗ»; Программа для ЭВМ «Банк вопросов для контроля знаний»; Консультант Плюс; Гарант; Moodle, учебно-наглядные пособия</p>
<p>Учебные аудитории для занятий семинарского типа, курсового проектирования (выполнения курсовых работ), групповых и индивидуальных консультаций, текущего контроля и промежуточной аттестации: преподавательский стол; стул; столы обучающихся; стулья; кафедра; классная доска, мультимедийный комплекс (проектор, экран), ноутбук, колонки, программное обеспечение: Windows 8.1 Professional; Office Standard 2010; Антивирусное программное обеспечение Kaspersky Security Cloud; Система поиска текстовых заимствований «Антиплагиат.ВУЗ»; Программа для ЭВМ «Банк вопросов для контроля знаний»; Консультант плюс; Гарант; Moodle,</p>
<p>Лаборатория - компьютерный класс для текущего контроля (тестирование): преподавательский стол, преподавательский стул, столы обучающихся, стулья, классная доска, мультимедийный комплекс (проектор, экран), колонки, ПК преподавателя, ПК обучающихся, программное обеспечение: Windows 7.1 Professional; Office Standard 2016; WinRar; Microsoft Visio; Microsoft Visual Studio; Kaspersky Security Cloud; Консультант Плюс, Гарант, Программа для ЭВМ «Банк вопросов для контроля знаний», Система поиска текстовых заимствований «Антиплагиат.ВУЗ», Moodle</p>
<p>Помещения для самостоятельной работы: - компьютерные классы с доступом к ресурсам сети Интернет: преподавательский стол, преподавательский стул, столы обучающихся, стулья, классная доска, мультимедийный комплекс (проектор, экран), колонки, ПК преподавателя, ПК обучающихся, программное обеспечение: Windows 7.1 Professional; Office Standard 2016; WinRar; Microsoft Visio; Microsoft Visual Studio; Kaspersky Security Cloud; Консультант Плюс, Гарант, Программа для ЭВМ «Банк вопросов для контроля знаний», Система поиска текстовых заимствований «Антиплагиат.ВУЗ», Moodle, - библиотека, в том числе читальный зал: столы, стулья, компьютеры (в т.ч. с выходом в интернет, доступом в ЭИОС), программное обеспечение: Adobe Flash Player 31; Adobe Reader 10; Java 6.0; K-Lite Codec Pack; Winrar; Microsoft Office 10; Microsoft Visio 10; Microsoft Visual Studio; Консультант плюс. Moodle, учебные и научные фонды библиотеки СОГУ, доступ к электронным библиотечным ресурсам: ЭБС "Университетская библиотека Online" http://www.biblioclub.ru Электронная библиотека диссертаций РГБ (ЭБД РГБ) https://dvs.rsl.ru Электронная библиотека «Консультант студента» http://www.studmedlib.ru/ Научная электронная библиотека eLibrary.ru http://elibrary.ru База данных «ЭБС elibrary» http://elibrary.ru Электронная библиотека «Юрайт» http://biblio-online.ru</p>